Tentamen i Mekanik 1 (FFM516)

Tid och plats: Måndagen den 11 april 2022 klockan 08.30-11.30 på Johanneberg.
Hjälpmedel: Inga
Examinator: Ulf Gran
Jour: Ulf Gran, tel. 031-772 3182, besöker tentamenssalarna c:a kl. 09.30 och 10.30.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2, ..., 6 poäng enligt följande principer:

- För 6 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-2 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 4 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 2 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

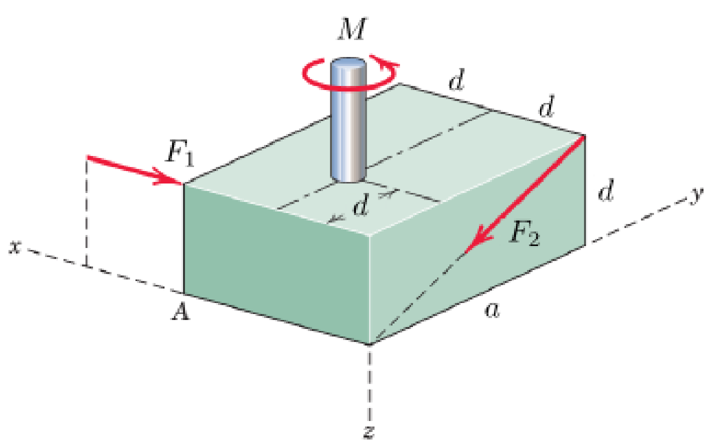
Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 6 poäng, vilket innebär totalt maximalt 18 poäng på denna deltentamen. För att bli godkänd krävs minst åtta poäng och 8-11 poäng ger betyg 3, 12-15 poäng ger betyg 4 och 16-18 poäng ger betyg 5.

Rättningsgranskning: Torsdagen 5 maj kl 12.30-13.00 i FL61.

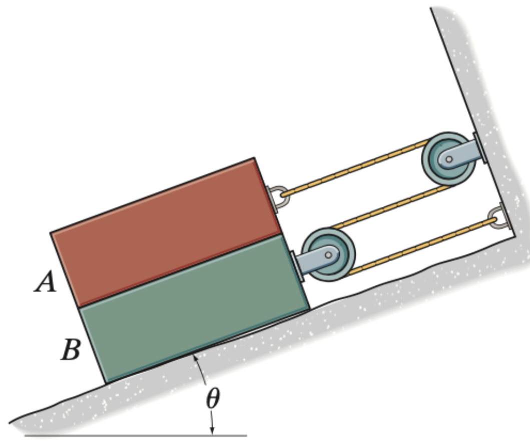
Uppgifter

OBS: I alla uppgifter får, om inget annat sägs, svaret ges i termer av de storheter som ges i uppgiftstexten och figuren samt tyngdaccelerationen g.

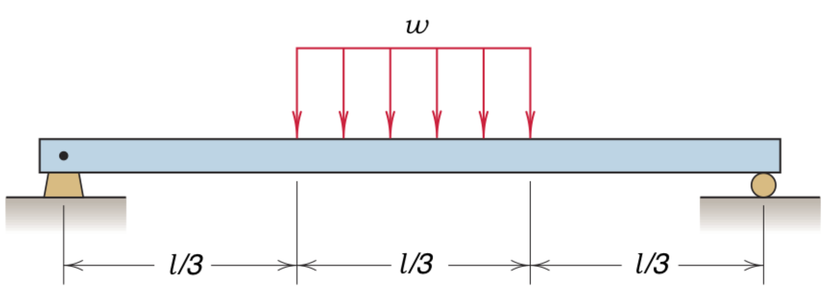
1. Ersätt de två krafterna och vridmomentet M med ett ekvivalent system vid punkten A. Svara i termer av storheter givna i figuren nedan.



2. Om den statiska friktionskoefficienten μ_s är lika för alla kontaktytor i problemet, vad blir då den lutningsvinkel θ vid vilken de två identiska blocken, varje med massan m, börjar glida?

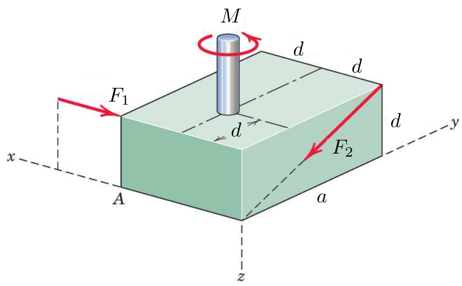


3. Rita diagram över skjuvkraften och böjmomentet för balken med totala längden l och med belastning enligt figuren (w är en distribuerad last med enhet N/m). Bestäm även det maximala böjmomentet och dess läge på balken. Balken antas vara masslös.



Lycka till!

1



Vridmomentet M är oberoende av angreppspunkt och kan därför flyttas till A utan några andra modifikationer.

Kraften F_1 ger uppehov till ett vridmoment

$$\boldsymbol{M}_1 = F_1 d\hat{\boldsymbol{y}}$$

Kraften F_2 kan vi med fördel flytta längst sin verkningslinje till origo. Vektorn $\boldsymbol{F}_2$ ges av

$$\boldsymbol{F}_2 = F_2 \frac{-a\hat{\boldsymbol{y}} + d\hat{\boldsymbol{z}}}{\sqrt{a^2+d^2}}$$

Då ges vridmomentet som den ger uppehov till av

$$\boldsymbol{M}_2 = \frac{F_2}{\sqrt{a^2+d^2}} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -2d & 0 & 0 \\ 0 & -a & d \end{vmatrix}$$

(Notera att vi kan ta ut normaliseringsfaktorn för komponenterna av $\boldsymbol{F}_2$ ur determinanten, varför?).

$$\boldsymbol{M}_2 = \frac{F_2}{\sqrt{a^2+d^2}}(2d^2\hat{\boldsymbol{y}} + 2da\hat{\boldsymbol{z}})$$

Den ekvivalenta kraften $\boldsymbol{R}_O$ och vridmomentet $\boldsymbol{M}_O$ ges nu av

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}_O &= -F_1\hat{\boldsymbol{x}} + F_2\frac{-a\hat{\boldsymbol{y}} + d\hat{\boldsymbol{z}}}{\sqrt{a^2+d^2}} \\ \boldsymbol{M}_O &= -M\hat{\boldsymbol{z}} + F_1 d\hat{\boldsymbol{y}} + F_2\frac{2d^2\hat{\boldsymbol{y}} + 2da\hat{\boldsymbol{z}}}{\sqrt{a^2+d^2}} \end{aligned}$$

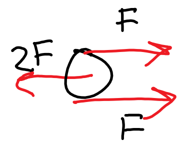
2

Sökt: vinkel $\theta = \theta_c$ för glidning

Givet: massor m, friktionskoefficient μ_c

Plan: Frilägg (var för sig obs Newton 3!), kraftjämvikt, kritiskt friktionsvillkor, Trissor

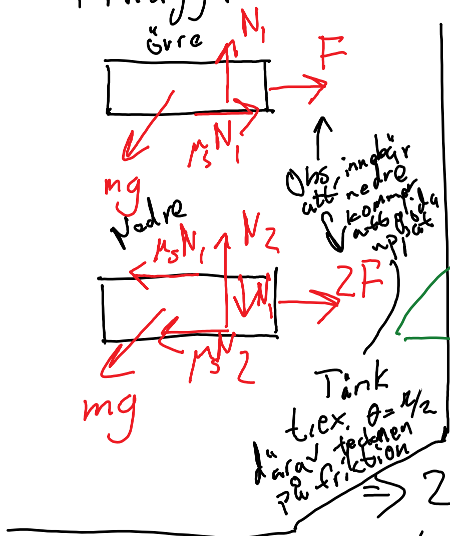
Lösning: Trissor:



Låt F vara kraften i linan.

Kritisk friktion, alltså $|F_f| = \mu_s N$. Riktningarna är viktiga!

Frilägg:



Kraftekvationer

$\uparrow: N_1 - mg\cos\theta = 0 \Rightarrow N_1 = mg\cos\theta$

$\rightarrow: F + \mu_s N_1 - mg\sin\theta = 0 \Rightarrow F = mg(\sin\theta - \mu_s\cos\theta)$

$\uparrow: N_2 - N_1 - mg\cos\theta = 0 \Rightarrow N_2 = 2mg\cos\theta$

$\rightarrow: 2F - \mu_s(N_1 + N_2) - mg\sin\theta = 0$

$\Rightarrow 2mg(\sin\theta - \mu_s\cos\theta) - \mu_s 3mg\cos\theta - mg\sin\theta = 0$

$mg\cos\theta \neq 0$

$\Rightarrow 2\tan\theta - 2\mu_s - 3\mu_s - \tan\theta = 0$

$\Rightarrow \tan\theta = 5\mu_s$

$\theta \in (0, \pi/2)$

$\Rightarrow \theta = \arctan 5\mu_s$

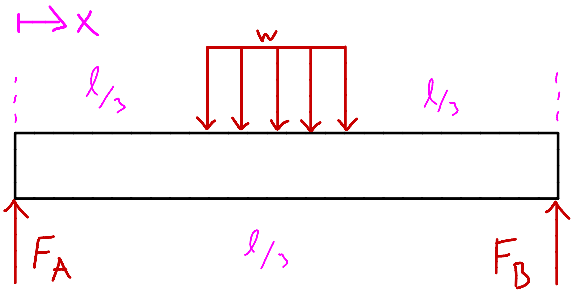
Kontroller: Enhetslöst, verkar rimligt $\theta \in (0, \pi/2)$

Svar: Blocken börjar glida vid $\theta = \arctan 5\mu_s$

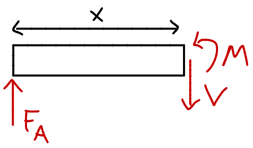
3 Sökt: Diagram över skuvkraft och böjmoment samt maximala böjmomentet och dess position.
Givet: Längden l, lasten w.

Plan: Lösa för externa krafterna först, sedan analys av interna krafter genom friläggning av delar av balken.

$$\circlearrowleft A: \; \ell F_B - \frac{\ell}{2}\cdot\frac{\ell}{3}\cdot w = 0$$
$$\circlearrowleft B: \; \frac{\ell}{2}\frac{\ell}{3}\cdot w - \ell F_A = 0$$
$$\Rightarrow F_A = F_B = \frac{\ell w}{6}$$

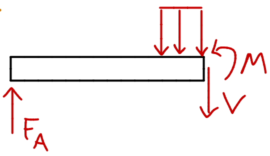


$x < \frac{\ell}{3}$



$$\begin{cases} \uparrow \; F_A - V = 0 \Rightarrow V = F_A = \frac{\ell w}{6} \\ \circlearrowleft A \; M - xV = 0 \Rightarrow M = x F_A = x\frac{\ell w}{6} \end{cases}$$

$\frac{\ell}{3} < x < \frac{2\ell}{3}$



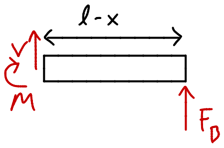
$$\begin{cases} \uparrow: \; F_A - V - w(x - \ell/3) = 0 \\ \circlearrowleft x: \; -F_A x + M + \frac{w}{2}(x - \ell/3)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\uparrow \Rightarrow V = F_A - w(x - \ell/3) = w(\ell/2 - x)$$
$$\circlearrowleft \Rightarrow M = \frac{w\ell}{6}x - \frac{w}{2}(x - \ell/3)^2$$

$[V] = \underbrace{m}_{\ell} \cdot \underbrace{\frac{[\text{kraft}]}{m}}_{w} = [\text{kraft}]$

$[M] = m \cdot m \cdot \frac{[\text{kraft}]}{m}$
$= m \cdot [\text{kraft}]$
$= [\text{vridmoment}]$

$x > \frac{2\ell}{3}$



$$\begin{cases} \uparrow \; V + F_B = 0 \Rightarrow V = -\frac{w\ell}{6} \\ \circlearrowleft B \; -M - (\ell - x)V = 0 \Rightarrow M = (\ell - x)\frac{w\ell}{6} \end{cases}$$

$$M' = 0 \Rightarrow x_{max} = \frac{\ell}{2}$$
$$M\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{w\ell}{6}\frac{\ell}{2} - \frac{w}{2}\left(\frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{3}\right)^2$$
$$= \frac{5}{72} w \ell^2$$